Profesor:
Fortunato Mendoza

PITAGORAS
ACADEMIA

ARITMÉTICA

GRUPO PITÁGORAS

TEORIA DE NÚMEROS

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Conjunto numérico de aplicación:

$Z^+ = \{1; 2; 3; 4; .....\}$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD)

El MCD de un conjunto de enteros positivos es aquel entero positivo que cumple dos condiciones :

- Ser divisor común del conjunto de enteros positivos.
- Ser el mayor posible.

Ejemplo: Sean los números 16 y 24

Divisores comunes de 16 y 24 :

1; 2; 4; 8 → mayor

∴ **MCD(16; 24)** = 8

Del ejemplo

Div(8) : 1; 2; 4; 8

Se observa que :

Los divisores comunes de 16 y 24 son también los divisores del MCD(16; 24) = 8

En general :

Los divisores comunes de un conjunto de números enteros positivos, son también los divisores del MCD de dicho conjunto de números.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Aplicación:

¿Cuántos divisores comunes tienen los números 400 y 600?

Resolución.

1°) MCD(400; 600) = 200 $= 2^3.5^2$

2°) $CD_{(200)} = 4.3 = 12$

$\therefore$ 400 Y 600 tienen 12 divisores comunes

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

El MCM de un conjunto de enteros positivos es aquel entero positivo que cumple dos condiciones :

- Ser múltiplo común del conjunto de enteros positivos
- Ser el menor posible

Ejemplo : Sean los números 16 y 24

Múltiplos comunes de 16 y 24 :

48; 96; 144; 192; .....

Menor

∴ MCM(16; 24) = 48

Del ejemplo

Múltiplos(48) : 48; 96; 144; 192 . . . .

Se observa que :

Los múltiplos comunes de 16 y 24 son también los múltiplos del MCM(16; 24) = 48.

En general :

Los múltiplos comunes de un conjunto de números enteros positivos, son también los múltiplos del MCM de dicho conjunto de números.

Aplicación:

¿Cuántos múltiplos comunes de tres cifras tienen los números 12 y 15?

Resolución.

1°) MCM(12; 15) = 60

2°) Múltiplos comunes: $60k$

Sea 60k= $\overline{abc}$

Observación: K = 2; 3; 4; ……;16

Por cada valor de k, hay un múltiplo común
Como k toma 15 valores

$\therefore$ Habrá 15 múltiplos comunes

MÉTODOS PARA DETERMINAR EL MCD - MCM

1. Por Descomposición Simultánea

Dado un conjunto de números, el MCD se obtiene al multiplicar los factores comunes extraídos a los números hasta que sean PESI; para el MCM se continúa extrayendo todos los factores no comunes y el MCM se obtiene multiplicando los factores comunes y no comunes extraídos.

Ejemplo :

Calcular el MCD y MCM de los números : 96, 120 y 180

	96	120	180	2	MCD, MCM
	48	60	90	2	MCD, MCM
	24	30	45	3	MCD, MCM
PESI ➡	8	10	15	2	MCM
	4	5	15	2	MCM
	2	5	15	2	MCM
	1	5	15	3	MCM
	1	5	5	5	MCM
	1	1	1		

$MCD(96; 120; 180) = 2^2 . 3 = 12$

$MCM(96; 120; 180) = 2^5 . 3^2 . 5 = 1\,440$

2. Por Descomposición Canónica

Dado un conjunto de números y su descomposición canónica, el MCD, es igual al producto de los factores primos comunes elevados cada uno de ellos a su menor exponente.

El MCM es igual al producto de los factores primos comunes y no comunes elevados cada uno de ellos a su mayor exponente.

Ejemplo : Dados los siguientes números :

$A = 2^4 . 3^2 . 5^3$

$B = 2^3 . 3^5 . 5 . 7^2$

$C = 2^5 . 3^6 . 5^2 .7^4$

$$MCD(A; B; C) = \underbrace{2^3 . 3^2 . 5^1}_{\text{comunes}} \leftarrow \text{menores exponentes}$$

$$MCM(A; B; C) = \underbrace{2^5 . 3^6 . 5^3 . 7^4}_{\text{todos}} \leftarrow \text{mayores exponentes}$$

Divisiones sucesivas o algoritmo de Euclides para el cálculo del MCD de dos enteros positivos

Ejemplo:

Calculemos el MCD(84; 60) efectuando las divisiones por defecto :

	1	2	2	→ cocientes
84	60	24	12	→ MCD
	24	12	0	→ residuos

$84 \,\underline{|\,60}$ $\quad$ $60 \,\underline{|\,24}$

$24 \quad 1$ $\quad$ $12 \quad 2$

∴ MCD(84; 60) = 12

Nota: Si se tiene

	q	
D	d	
	r	

Se cumple $\boxed{D = dq + r}$

NOTA

Si

	q_e	
D	d	
	r_e	

$\rightarrow D = dq_e - r_e$

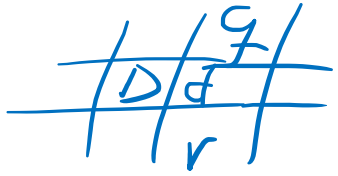
Ejercicio:

Calcular el mayor de dos números, sabiendo que al determinar su MCD por el algoritmo de Euclides, se obtuvo como cocientes sucesivos 1; 3; 2; 4 y 2; además su MCD resultó ser 45

Resolución:

Sean los #s A y B (A>B)

	1	3	2	4	2	
A	B	20k	9k	2k	k	→ MCD
	20k	9k	2k	k	0	



→ $D = dq + r$

Dato: $k = 45$

$B = 69k$

$A = 89k$

Pide $A = 89(45) = 4005$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

PROPIEDADES

1. Si A y B son PESI ; se cumple:

$\boxed{MCD(A; B) = 1}$

$\boxed{MCM(A; B) = A \cdot B}$

Ejemplo #s 8 y 15 son PESI

MCD (8; 15) = 1

MCM (8; 15) = 120

2. Dados dos números A y B : si A = $\dot{B}$

Se cumple:

$\boxed{MCD(A; B) = B}$

$\boxed{MCM(A; B) = A}$

Ejemplo Sean los #s 60 y 15

Como $60 = \dot{15}$

MCD(60; 15) = 15 → menor #

MCM(60; 15) = 60 → mayor #

3. MCD y MCM por asociación

$\boxed{*}$ Si MCD(A; B) = d_1

MCD(C; D) = d_2

Se cumple:

$\boxed{MCD(A;B;C;D) = MCD(d_1; d_2)}$

Ejemplo

Si MCD(A; B) = 120

MCD(C; D) = 180

→ MCD(A; B; C; D) = MCD(120; 180)

= 60

✳ Si MCM(A; B) = m_1

MCM(C; D) = m_2

Se cumple:

$$\boxed{\text{MCM}(A; B; C; D) = \text{MCM}(m_1; m_2)}$$

Ejemplo

Si MCM(A; B) = 33

MCM(B; C) = 44

→ MCM(A; B; C) = MCM(33; 44) = 132

4. Sea "a" ∈ Z mayor que 1, {α; β; θ) ∈ Z^+ tal que :

$$A = a^{\alpha} - 1$$
$$B = a^{\beta} - 1$$
$$C = a^{\gamma} - 1$$

Se cumple:

$$\boxed{\text{MCD}(A;B;C) = a^{\text{MCD}(\alpha;\beta;\gamma)} - 1}$$

Ejemplo

Si $A = 10^{80} - 1$

$B = 10^{60} - 1$

> MCD(A; B) = $10^{20} - 1$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Teorema

Para dos números A y B

Sea MCD(A; B) = d

MCM(A; B) = m

Se cumple:

1) $\boxed{A = d\,p}$ $\boxed{B = d\,q}$

Donde p y q son primos entre si

2) $\boxed{m = d\,p\,q}$

3) $\boxed{A.B = d\,m}$

$A.B = MCD(A;B).MCM(A;B)$

Aplicación:

Calcular el mayor de dos números, sabiendo que suman 48 y su MCD es 8

Resolución:

#s A y B

$A+B=48$ ...(1)

$MCD(A;B)=8 \rightarrow A=8p;\ B=8q$

p y q son PESI

En (1) $8p+8q=48$

$p+q=6 \rightarrow A=8;\ B=40$

1 5

RPTA: 40

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

01. Calcule e.v, si se sabe que:

$$A = \frac{50^{e+v}}{4^{v}} \text{ y } B = 10^{e+v}$$

tienen 77 divisores comunes

A) 16 B) 12 C) 20

D) 24 E) 32

Resolución:

$$A = \frac{50^{e+v}}{4^{v}} \rightarrow A = 2^{e-v} \cdot 5^{2e+2v}$$

$$B = 10^{e+v} \rightarrow B = 2^{e+v} \cdot 5^{e+v}$$

$$MCD(A, B) = 2^{e-v} \cdot 5^{e+v} \rightarrow 77 \text{ div}$$

$$(\underbrace{e-v+1}_{7})(\underbrace{e+v+1}_{11}) = 77$$

Obs $\left.\begin{array}{l} e+v=10 \\ e-v=6 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} e=8 \\ v=2 \end{array}$

Piden $e \cdot v = 8 \cdot 2 = 16$

02. .Al calcular el MCD[$\overline{(a+1)(b+1)c}$; $\overline{(a-1)bc}$] por el algoritmo de Euclides se obtuvieron como cocientes sucesivos 2; 3; 3 y 2. Calcule: a + b + c.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

Resolución:

#s $\overline{(a+1)(b+1)c}$ y $\overline{(a-1)bc}$

	2	3	3	2	
$\overline{(a+1)(b+1)c}$	$\overline{(a-1)bc}$	$7k$	$2k$	k	$\rightarrow$ MCD
	$7k$	$2k$	k	0	

Obs $\overline{(a-1)bc} = 23k$ ...(1)

$\overline{(a+1)(b+1)c} = 53k$ ...(2)

$$\begin{array}{r} \overline{(a+1)(b+1)c} \; - \\ \overline{(a-1)\;b\;c} \\ \hline 2\;\;1\;\;0 \end{array}$$

(2) - (1) $210 = 30k \rightarrow k = 7$

En (1) $\overline{(a-1)bc} = 23(7)$

$\overline{(a-1)bc} = 161 \rightarrow a=2;\ b=6;\ c=1$

$\therefore\ a+b+c = 9$

03. El MCM de dos números enteros es 85 440. Si al calcular el MCD de estos dos números por el algoritmo de Euclides, los cocientes sucesivos fueron: 2, 6, 3 y 5 (siendo 3 un cociente por exceso), calcule la suma de las cifras del mayor de los dos números.

A) 12 B) 15 C) 18
D) 21 E) 24

Resolución:

#s A y B (A>B)

	2	6	3*	5	
A	B	14k	5k	k	→ MCD
	14k	5k	k	0	

Obs B = 89k

A = 192k

Dato: MCM(A; B) = 85440

MCM(192k; 89k) = 85440

17088k = 85440

k = 5

Mayor #: A = 192k = 192(5)

= 960

Σ cifras = 15

04. Calcule "n", si:

$A = 45.60^n$

$B = 60.45^n$

además se cumple:

$$MCM(A; B) = 12 \times MCD(A; B)$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución:

$A = 45 \cdot 60^n \rightarrow A = 2^{2n} \cdot 3^{n+2} \cdot 5^{n+1}$

$B = 60 \cdot 45^n \rightarrow B = 2^2 \cdot 3^{2n+1} \cdot 5^{n+1}$

Dato: $MCM(A;B) = 12\ MCD(A;B)$

$2^{2n} \cdot 3^{2n+1} \cdot 5^{n+1} = 2^2 \cdot 3 \left[2^2 \cdot 3^{n+2} \cdot 5^{n+1}\right]$

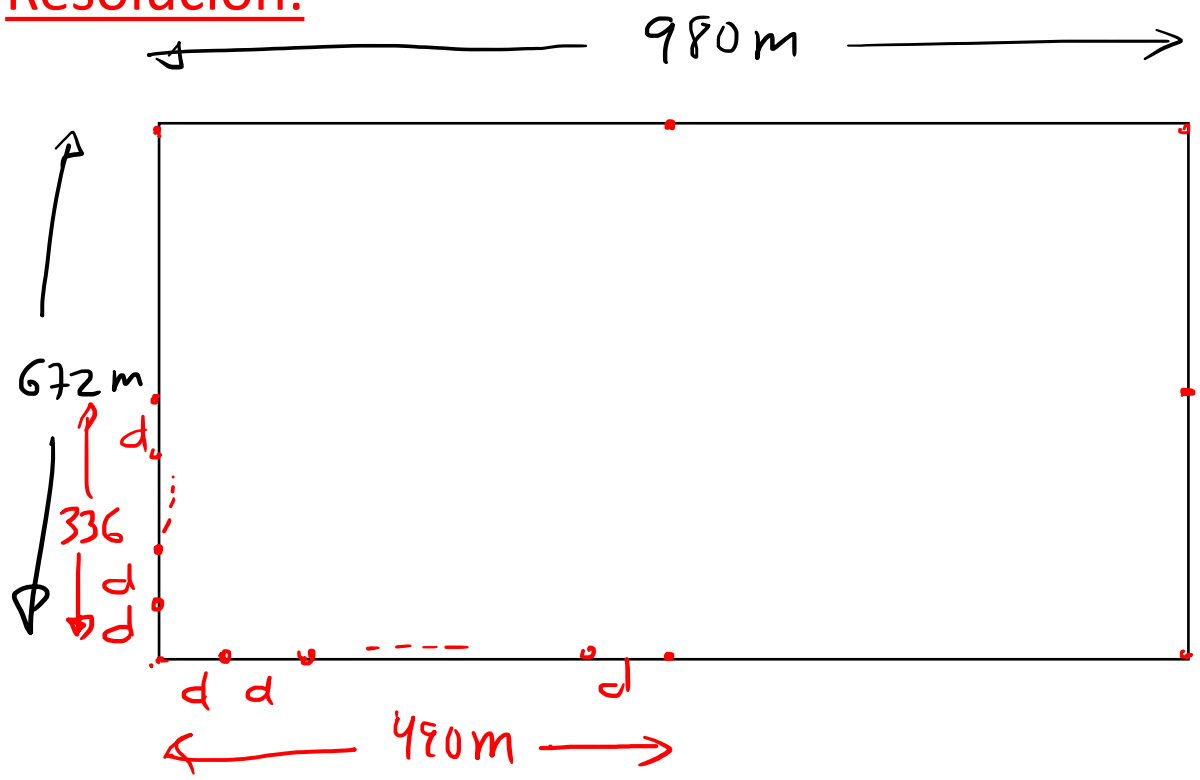
$2^{2n} \cdot 3^{2n+1} \cdot 5^{n+1} = 2^4 \cdot 3^{n+3} \cdot 5^{n+1}$

Obs $2n = 4 \rightarrow n = 2$

05. Se quiere cercar un terreno rectangular de 980 m de largo y 672 m de ancho con postes equidistantes. Si además se debe colocar uno en cada vértice y otro en el punto medio de cada lado, ¿cuál es el menor número de postes que se deben emplear?

A) 144 B) 120 C) 208
D) 118 E) 236

Resolución:



postes es mínimo

Se cumple

* d es divisor común de de 480 y 336

** d es máximo

$\rightarrow d = MCD(480; 336) = 14$

Piden

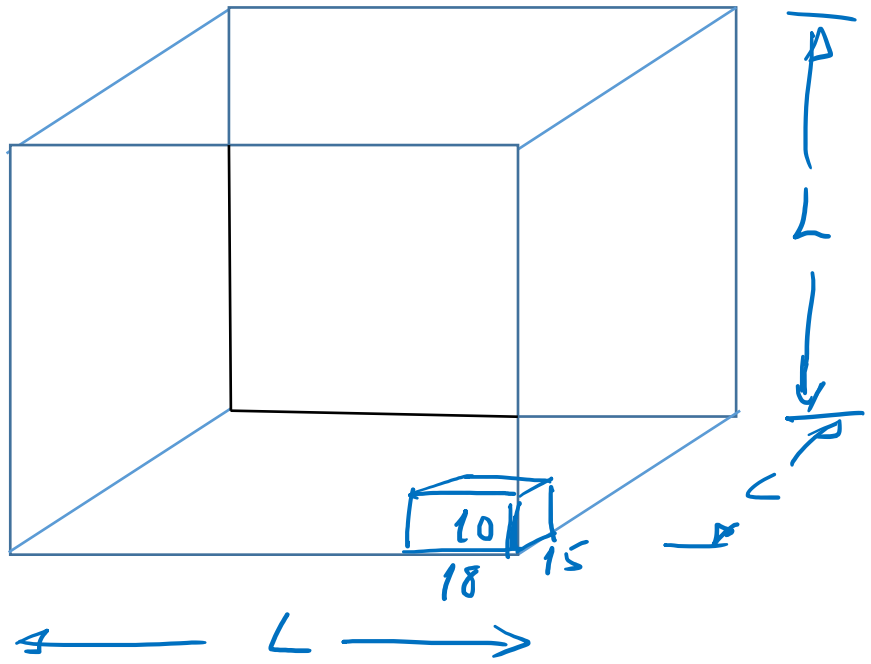
$$\#\text{postes} = \frac{\text{Perímetro}}{d} = \frac{3304}{14}$$

$$= 236$$

06. Se dispone de ladrillos cuyas dimensiones son: 18; 15 y 10 cm. ¿Cuántos de estos ladrillos serán necesarios para formar el cubo compacto más pequeño posible?

A) 160 B) 270 C) 280
D) 290 E) 300

Resolución:



Se cumple

- L es múltiplo común de 18; 15 y 10
- L es mínimo

$\rightarrow L = MCM(18; 15; 10)$

$L = 90$

Piden

$$\#lad = \frac{V_{CUBO}}{V(\text{LADO})} = \frac{90 \cdot 90 \cdot 90}{18 \cdot 15 \cdot 10}$$

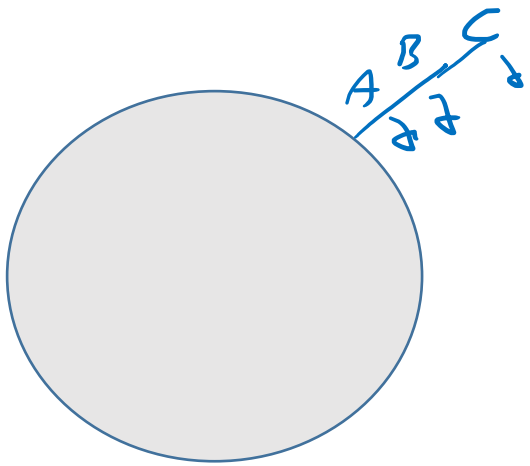
$$\#lad = 5 \cdot 6 \cdot 9 = 270$$

07. Tres móviles (A, B y M) parten al mismo tiempo de una misma línea de partida de una pista circular que tiene 240 m de circunferencia. A se desplaza con velocidad de 8 m/s; B a 5 m/s y C a 3 m/s. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que los tres móviles se encuentren por primera vez?

A) 4 min
B) 6 min
C) 12 min
D) 8 min
E) Jamás ocurre un encuentro

en la línea de partida

Resolución:



$L_{\odot} = 240m$

$V_A = 8 m/s$

$V_B = 5 m/s$

$V_C = 3 m/s$

En dar 1 vuelta

$t_A = \frac{240}{8} = 30 s$

$t_B = \frac{240}{5} = 48 s$

$t_C = \frac{240}{3} = 80 s$

Sea t el tiempo pedido

* t es múltiplo común de 30; 48 y 80
* t es mínimo

$\rightarrow t = MCM(30; 48; 80)$

$t = 240 s \Leftrightarrow 4 min$

08. El señor Oliver observó desde su ventana una movilización de personas y comenzó a contarlos, luego pronunció: "No es $\overset{\circ}{9}$ porque sobran 2, si lo escribo en base 7 termina en 2 y si los cuento de 8 en 8 incluyéndome, entonces sobraría la unidad, pero, éstos pasan de 600 y no llegan a 1 000". Calcule cuántas personas contó el señor Oliver.

A) 920 B) 780 C) 810
D) 632 E) 828

Resolución:

Sea N el # de personas

$N = \overset{\circ}{9} + 2$

$N = \ldots 2_{(7)} = \overset{\circ}{7} + 2$

$N + 1 = \overset{\circ}{8} + 1 \rightarrow N = \overset{\circ}{8}$

$* \; 600 < N < 1000$

Luego

$$N = \begin{cases} \overset{\circ}{9} + 2 \\ \overset{\circ}{7} + 2 \\ \overset{\circ}{8} \end{cases} \begin{array}{l} \rightarrow N = \overset{\circ}{63} + 2 + 126 \\ \\ \rightarrow N = \overset{\circ}{8} + 128 \end{array}$$

$N = \overset{\circ}{504} + 128 \rightarrow N = 504k + 128$

Obs $k = 1 \rightarrow N = 632$

09. Si:

$$\frac{MCM(x;\ y)}{x} = \frac{80}{10} \wedge \frac{MCM(x;\ y)}{y} = \frac{50}{10}$$

además MCD(3x; 4y) = 90, calcule la suma de las cifras del MCM(x; y)

A) 9 B) 15 C) 18
D) 27 E) 36

Resolución:

$MCM(x;y) = 8x$
$MCM(x;y) = 5y$

$8x = 5y$

$\frac{x}{y} = \frac{5}{8} \rightarrow x = 5k,\ y = 8k$

Dato: $MCD(3x;4y) = 90$

$\underbrace{MCD(15k;32k)}$ $= 90$

$k = 90 \rightarrow x = 450$

Luego

$MCM(x;y) = 8(450)$

$MCM(x;y) = 3600 \rightarrow \Sigma cifras = 9$

10. Si:

$$MCD(kA; kB) = 16$$

$$MCD\left(\frac{A}{k^2}; \frac{B}{k^2}\right) = 2$$

calcule: $MCD(k^2A; k^2B)$

A) 24 B) 28 C) 32

D) 36 E) 40

Resolución:

$MCD(kA; kB) = 16 \rightarrow MCD(A; B) = \frac{16}{k}$

$MCD\left(\frac{A}{k^2}; \frac{B}{k^2}\right) = 2 \rightarrow MCD(A; B) = 2k^2$

Igualando $\frac{16}{k} = 2k^2 \rightarrow 8 = k^3 \rightarrow k = 2$

Luego $MCD(A; B) = 8$

Piden $\times 4$ $\downarrow \times 4$

$MCD(4A; 4B) = 32$

11. Si:

$$MCD(\overline{4p8p};\ \overline{5qpr};\ \overline{34r}) = 9,$$

calcule el valor de:

$$E = p^2 + q^2 + r^2$$

A) 26 B) 29 C) 38
D) 42 E) 77

Resolución:

$MCD(\overline{4p8p};\ \overline{5qpr};\ \overline{34r}) = 9$

Se cumple

$\overline{4p8p} = \overset{\circ}{9}$ ... (1)

$\overline{5qpr} = \overset{\circ}{9}$ ... (2)

$\overline{34r} = \overset{\circ}{9}$ ... (3)

De (1) $2p + 12 = \overset{\circ}{9} \rightarrow p = 3$

De (3) $7 + r = \overset{\circ}{9} \rightarrow r = 2$

En (2) $\overline{5q32} = \overset{\circ}{9}$

$q + 10 = \overset{\circ}{9} \rightarrow q = 8$

Piden

$E = 9 + 64 + 4 = 77$

12. Calcule el mayor de dos números, sabiendo que su suma es igual a 6 veces su MCD y su producto es 8 veces su MCM

A) 30 B) 24 C) 48
D) 40 E) 56

Resolución:

#s A y B → $\begin{cases} A = dp;\ B = dq \\ A \times B = d.m \end{cases}$
(A > B)

$A + B = 6d \rightarrow \cancel{dp} + \cancel{dq} = 6\cancel{d} \rightarrow p + q = 6$
5 1

$A \times B = 8m \rightarrow d = 8$

Luego $A = 8(5) = 40$
$B = 8(1) = 8$

RPTA: 40

$MCD(A;B) = d$

$MCM(A;B) = m$

$\boxed{A = dp}$

$\boxed{B = dq}$

$\boxed{m = dpq}$

$\boxed{A \times B = d.m}$

13. Si: MCD(a; b) = 4 y $a^2b + ab^2 = 1\ 920$, calcule MCM(a; b; a+b)

A) 120 B) 150 C) 180
D) 200 E) 250

Resolución:

$\times MCD(a;b) = 4 \rightarrow \begin{cases} a = 4p \\ b = 4q \end{cases}$ p y q → PESI

$\times\ a^2b + ab^2 = 1920$

$16p^2 \cdot 4q + 4p \cdot 16q^2 = 1920 \rightarrow p^2q + p \cdot q^2 = 30$

$pq(p+q) = 30 \rightarrow p = 2;\ q = 3$

$a = 8;\ b = 12$

Piden

$MCM(8; 12; 20) = 120$

14. El MCD de dos enteros es 8 y la suma de sus cubos es 46 592. Calcular el MCM de dichos números.

A) 48 B) 64 C) 72
D) 96 E) 120

Resolución:

#s A y B

* $MCD(A;B)=8 \rightarrow \begin{cases} A=8p;\ B=8q \\ p \text{ y } q \text{ son PESI} \end{cases}$

* $A^3+B^3=46592 \rightarrow 512p^3+512q^3=46592$

$p^3+q^3=91 \rightarrow p=3;\ q=4$

Piden

$MCM(A;B)=dpq=8\cdot(3)(4)=96$

$m=dpq$

MCM MCD

15. Calcule la suma de dos números cuyo MCD sea 18, sabiendo que el primero tiene 10 divisores y el segundo 15 divisores.

A) 162 B) 144 C) 288
D) 306 E) 432}

Resolución:

#s A y B

$MCD(A;B)=18$

Se cumple

$A = 18p = 2 \times 3^2 p \rightarrow 10 \text{ div} = 2 \times 5$ ($p \rightarrow 3^2$)

$B = 18q = 2 \times 3^2 q \rightarrow 15 \text{ div} = 3 \times 5$ ($q \rightarrow 2^3$)

Luego $A = 2 \times 3^4 \rightarrow 10 \text{ div}$ $A = 162$

$B = 2^4 \times 3^2 \rightarrow 15 \text{ div}$ $B = 144$

$\therefore A + B = 306$

16. Un número excede a otro en 44 unidades y la diferencia entre su MCM y su MCD es 500. Calcular dichos números y dar su suma.

A) 77 B) 99 C) 110
D) 100 E) 144

Resolución:

Hs A y B → $\begin{cases} A = dp \ ; \ B = dq \\ p \text{ y } q \text{ son PESI} \\ m = dpq \end{cases}$

$* \ A - B = 44 \rightarrow d(p-q) = 2^2 \cdot 11$

$* \ m - d = 500 \rightarrow d(pq-1) = 2^2 \cdot 5^3$

Obs $d = 2^2 \rightarrow \begin{cases} p - q = 11 \\ p \cdot q = 126 \end{cases}$ $\begin{cases} p = 18 \\ q = 7 \end{cases}$

Luego $A = 4(18) = 72$

$B = 4(7) = 28$

Piden $A + B = 100$

$MCD(A;B) = d$

$MCM(A;B) = m$

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

17. Si:

$$MCD(\overline{evm}; 756; 972) = 36; \cancel{\overline{evm} \neq 3};$$

calcule la suma de todos los números de la forma $\overline{evm}$.

A) 6 105 B) 6 984 C) 7 236
D) 7 704 E) 8 640

Resolución:

$MCD(\overline{evm}; 756; 972) = 36$

Se cumple

$\overline{evm} = 36p$

$756 = 36(21)$

$972 = 36(27)$

donde p; 21 y 27 son PESI

$\rightarrow p \neq \dot{3}$

$100 \leq 36p \leq 999 \rightarrow 2,7 \leq p \leq 27,7$

$p = 3; 4; 5; \ldots; 27$

$p \neq 3; 6; 9; \ldots; 27$

Pidin

$S = 36\left(\frac{30}{2} \times 25\right) - 36\left(\frac{30}{2} \times 9\right)$

$S = 8640$

PROBLEMAS

18. Si: $E = \overline{3c4d}$ y $V = \overline{udcu}$

además se cumple:
$MCM(E; V) = MCM(7V; 5E)$ y $c + d = 7$, calcule $MCD(\overline{ccd}; \overline{dcu})$

A) 3 B) 5 C) 7
D) 15 E) 35

Resolución:

PROBLEMAS

19. Si MCM(A; B) = 2 100 y MCD(A; B) = 7 ¿cuántos pares de números, que tienen
al menos 2 cifras, cumplen estas condiciones?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución:

PROBLEMAS

20. Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

( ) Si MCD($\overline{a2!}$; $\overline{3b!}$) = $\overline{c6!}$, entonces el mayor valor de a + b + c es 10.

( ) Si MCD(A; B) = 108, entonces A y B tienen 12 divisores comunes.

( ) Si MCD(A; B) = MCD(B; C) = K, entonces MCD(A; C) = K

A) FVV B) VFV C) FFF
D) FVF E) VVF

Resolución:

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS